

Nom : Corrigé

Groupe : _____

Cours d'aide à la réussite – Cours 2

La similitude

Figures isométriques et éléments homologues

- Des figures isométriques sont des figures qui ont la même forme et les mêmes grandeurs.
- Les côtés ou les angles homologues de figures isométriques sont les côtés ou les angles qui se correspondent.

Homothétie

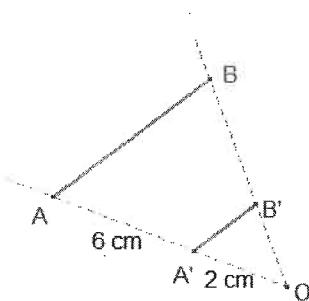
Caractéristiques :

- 1- Les côtés homologues sont parallèles.
- 2- Les angles homologues sont isométriques.
- 3- Les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

Rapport d'homothétie : $k = \frac{\text{mesure d'un segment image}}{\text{mesure du segment homologue initial}}$

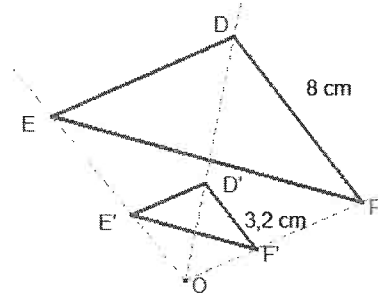
Exemples :

a)



$$k = \frac{m\overline{OA'}}{m\overline{OA}} = \frac{2\text{ cm}}{(6+2)\text{ cm}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

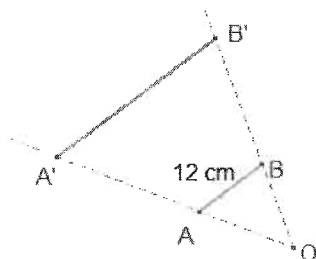
b)



$$k = \frac{m\overline{D'F'}}{m\overline{DF}} = \frac{3,2\text{ cm}}{8\text{ cm}} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$

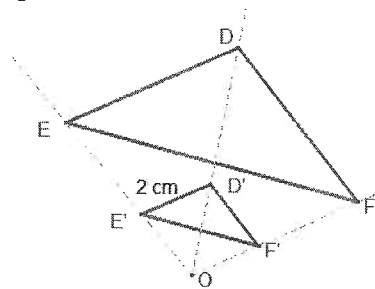
Mesure manquante : $m_{IMAGE} = m_{INITIALE} \times k$

a) $k = 3$



$$\begin{aligned} m_{\overline{A'B'}} &= m_{\overline{AB}} \cdot k \\ &= 12 \cdot 3 \\ &= 36 \text{ cm} \end{aligned}$$

b) $k = \frac{2}{3}$



$$\begin{aligned} m_{\overline{D'E'}} &= m_{\overline{DE}} \cdot k \\ \frac{3}{2} \cdot 2 &= m_{\overline{DE}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \\ 3 \text{ cm} &= m_{\overline{DE}} \end{aligned}$$

Similitude

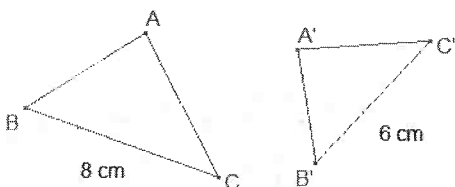
Caractéristiques :

- 1- Les angles homologues sont isométriques.
- 2- Les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

Rapport de similitude : $k = \frac{\text{mesure côté image}}{\text{mesure côté homologue initial}}$

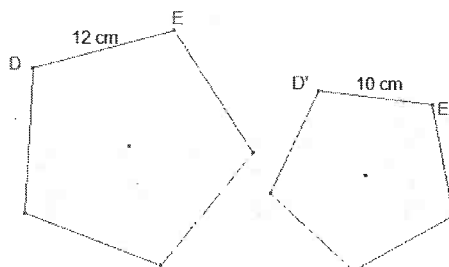
Exemples :

a)



$$k = \frac{m_{\overline{B'C'}}}{m_{\overline{BC}}} = \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{3}{4}$$

b)



$$k = \frac{m_{\overline{D'E'}}}{m_{\overline{DE}}} = \frac{10 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = \frac{5}{6}$$

Mesure manquante : $m_{\text{IMAGE}} = m_{\text{INITIALE}} \times k$

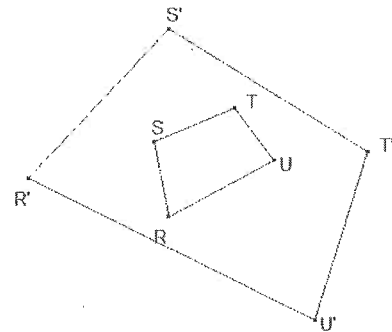
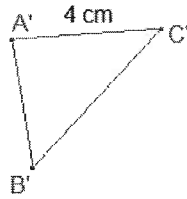
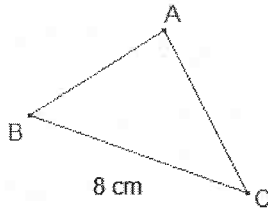
Exemples :

a) $k = \frac{4}{5}$

b) $k = \frac{5}{3}$

$m_{\overline{ST}} = 9 \text{ dm}$

$m_{\overline{T'U'}} = 20 \text{ dm}$



$m_{\overline{B'C'}} =$

$m_{\overline{AC}} =$

$m_{\overline{S'T'}} =$

$m_{\overline{TU}} =$

$m_{\overline{B'C'}} = m_{\overline{BC}} \cdot k$
 $= 8 \text{ cm} \cdot \frac{4}{5}$
 $= 6,4 \text{ cm}$

$m_{\overline{A'C'}} = m_{\overline{AC}} \cdot k$
 $\frac{5}{4} \cdot 4 \text{ cm} = m_{\overline{AC}} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$
 $5 \text{ cm} = m_{\overline{AC}}$

$m_{\overline{S'T'}} = m_{\overline{ST}} \cdot k$
 $= 9 \text{ dm} \cdot \frac{5}{3}$
 $= 15 \text{ dm}$

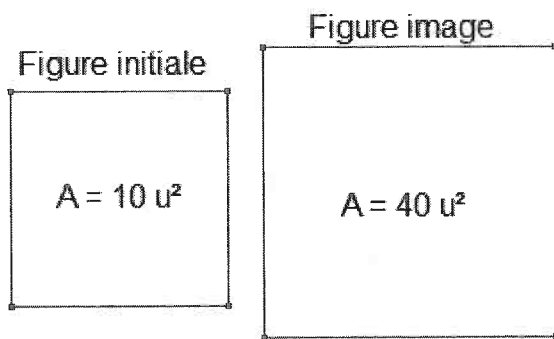
$m_{\overline{T'U'}} = m_{\overline{TU}} \cdot k$
 $\frac{3}{5} \cdot 20 \text{ dm} = m_{\overline{TU}} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}$
 $12 \text{ dm} = m_{\overline{TU}}$

Rapport des aires

Rapport : $k^2 = \frac{\text{Aire figure image}}{\text{Aire figure initiale}} = (\text{Rapport de similitude})^2$

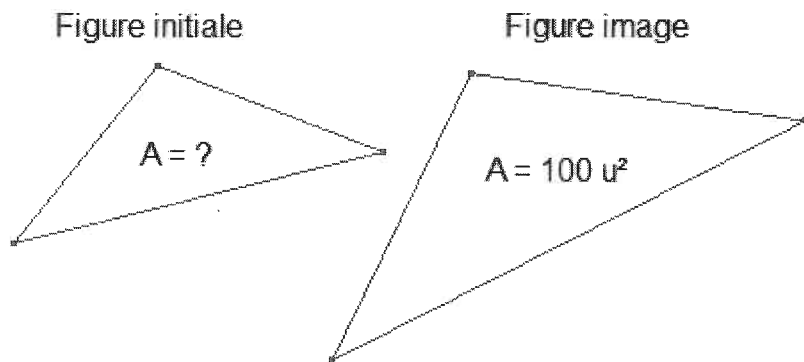
Exemples :

a) Trouve le rapport des aires.



$k^2 = \frac{A_{\text{image}}}{A_{\text{initiale}}} = \frac{40 \text{ u}^2}{10 \text{ u}^2} = 4$

b) Trouve l'aire de la figure initiale, sachant que le rapport de similitude est de 5.



1) Rapport des aires
 $k^2 = 5^2 = 25$

2) Aire de la figure initiale

$$A_{\text{ima}} = A_{\text{ini}} \cdot k^2$$

$$\frac{100 u^2}{25} = \frac{A_{\text{ini}} \cdot 25}{25}$$

$$4 u^2 = A_{\text{ini}}$$

Exercices

1- Réponds aux questions dans le document Cabri disponible sur « matières » (Excltic).

2- Dans chaque cas, indique si la figure image obtenue par l'homothétie de rapport k sera réduite ou agrandie.

a) $k = \frac{2}{5}$ réduite

d) $k = 0,75$ réduite

b) $k = 3$ agrandie

e) $k = 2,5$ agrandie

c) $k = \frac{10}{3}$ agrandie

f) $k = \frac{4}{7}$ réduite

3- Indique si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux.

a) L'homothétie conserve les mesures des angles. VRAI

b) Un rapport d'homothétie de -1 indique une réduction de la figure initiale.

FAUX

c) Un rapport d'homothétie de 0,8 indique un agrandissement de la figure initiale.

FAUX

d) Les côtés homologues d'une figure et de son image par homothétie sont nécessairement proportionnels.

VRAI

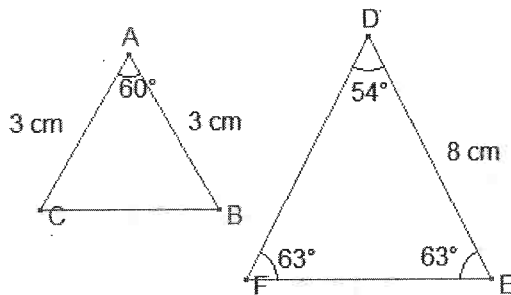
4- Quel est le rapport de similitude de deux carrés dont les côtés mesurent respectivement 72 cm et 48 cm?

$$k = \frac{m_{IMA}}{m_{INI}} = \frac{72 \text{ cm}}{48 \text{ cm}} = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad k = \frac{m_{INI}}{m_{IMA}} = \frac{48 \text{ cm}}{72 \text{ cm}} = \frac{2}{3}$$

5- Les paires de figures suivantes sont-elles semblables?

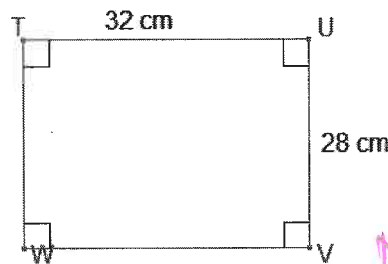
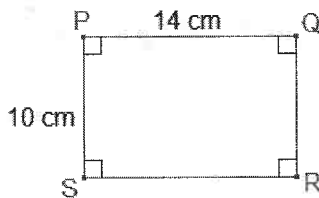
Indice : Compare les mesures des angles et des côtés homologues.

a)



NON, car les angles homologues ne sont pas isométriques!

b)



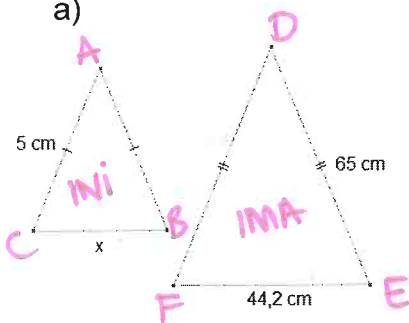
$$\frac{m_{PQ}}{m_{TU}} = \frac{14 \text{ cm}}{32 \text{ cm}} = \frac{7}{16}$$

$$\frac{m_{PS}}{m_{UV}} = \frac{10 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} = \frac{5}{14}$$

NON, car les rapports des côtés homologues ne sont pas égaux.

6- Les paires de figures suivantes sont semblables. Dans chaque cas, trouve la mesure manquante.

a)



1) Rapport de similitude

$$k = \frac{m_{DE}}{m_{AB}} = \frac{65 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 13$$

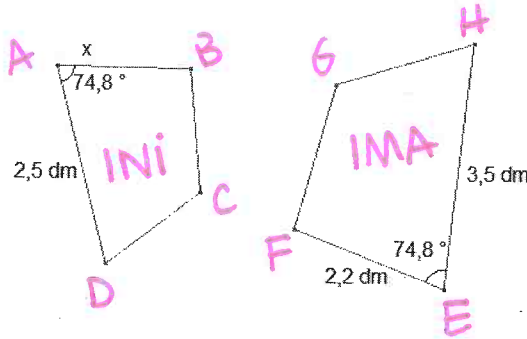
2) mesure de BC (valeur de x)

$$m_{EF} = m_{BC} \cdot k$$

$$44,2 = \frac{x \cdot 13}{13}$$

$$3,4 \text{ cm} = x$$

b)



1) Rapport de similitude

$$k = \frac{m\overline{EH}}{m\overline{AD}} = \frac{3,5\text{dm}}{2,5\text{dm}} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

2) Valeur de x (m \overline{AB})

$$m\overline{EF} = m\overline{AB} \cdot k$$

$$\frac{5}{7} \cdot 2,2\text{dm} = x \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}$$

$$1,57\text{dm} \approx x$$

7- Le rapport de similitude entre deux cercles est de $\frac{2}{3}$. Sachant que le rayon du grand est de 39 cm, quelle est l'aire du petit cercle?

$k = \frac{2}{3} \rightarrow$ image est la réduction

1) Rayon petit cercle

$$m\overline{IMA} = m\overline{INI} \cdot k$$

$$r = 39 \cdot \frac{2}{3}$$

$$r = 26 \text{ cm}$$

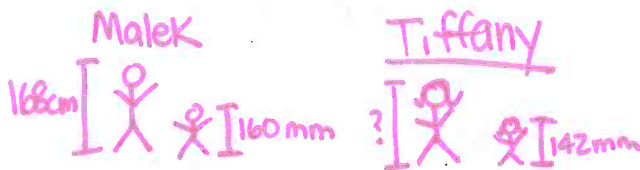
2) Aire petit cercle

$$A = \pi r^2$$

$$= \pi \cdot 26^2$$

$$\approx 2123,72 \text{ cm}^2$$

8- Malek mesure 168 cm. Son père a dessiné à l'échelle Malek et sa sœur Tiffany. Sur le dessin, Malek mesure 160 mm et sa sœur 142 mm. Quelle est la mesure réelle de la taille de Tiffany?



1) Échelle

$$k = \frac{168\text{cm}}{160\text{mm}} = \frac{21\text{cm}}{20\text{mm}}$$

2) Grandeur réelle de Tiffany

$$\frac{21\text{cm}}{20\text{mm}} = \frac{x}{142\text{mm}}$$

$$x = \frac{21\text{cm} \cdot 142\text{mm}}{20\text{mm}}$$

$$x = 149,1\text{cm}$$

9- Ismaël a tracé un octogone régulier dont le périmètre est de 20 cm. Son amie Laryssa a reproduit la même figure en quadruplant les dimensions. Trouve le rapport des périmètres et le rapport des aires des deux octogones.

1) Rapport des périmètres

$$k = 4$$

2) Rapport des aires

$$k^2 = 4^2 = 16$$

10-Samuel a tracé le plan de sa cour à l'échelle. La superficie réelle est de 93,75 m². Sur son dessin, la superficie est de 15 cm². Trouve le rapport de similitude que Samuel a utilisé pour illustrer le plan de sa cour.

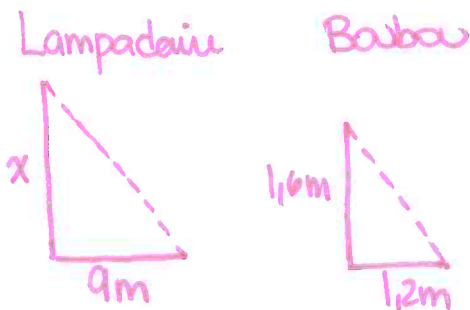
1) Rapport des aires

$$k^2 = \frac{15 \text{ cm}^2}{93,75 \text{ m}^2} = \frac{15 \text{ cm}^2}{937500 \text{ cm}^2} = 0,000016$$

2) Rapport de similitude

$$k = \sqrt{k^2} = \sqrt{0,000016} = 0,004$$

11-Puisque Boubou et Banjo adorent les mathématiques et qu'ils ont appris à mesurer de grands objets, ils tentent de savoir quelle est la hauteur d'un lampadaire dans leur rue. Boubou mesure 1,6 mètre et son ombre mesure 1,2 mètre. Banjo, quant à lui, mesure 1,8 mètre et son ombre mesure 1,35 mètre. ~~Trouve la hauteur du lampadaire, sachant que son ombre est de 9 mètres.~~



$$\frac{x}{9\text{m}} = \frac{1,6\text{m}}{1,2\text{m}}$$

$$\frac{1,2x}{1,2} = \frac{9 \cdot 1,6}{1,2}$$

$$x = 12\text{m}$$

12- Le rapport de similitude entre deux pentagones réguliers est de $\frac{3}{4}$. Le petit pentagone est à l'intérieur du grand pentagone. Quelle est l'aire entre le grand et le petit pentagone si l'aire du grand pentagone est de 240 cm^2 ?



$$k = \frac{3}{4}$$

$$A_{gr} = 240 \text{ cm}^2$$

1- Rapport des aires

$$k^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

2- Aire petit

$$\begin{aligned} A_{pet} &= A_{gr} \cdot k^2 \\ &= 240 \cdot \frac{9}{16} \\ &= 135 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

3- Aire entre les pentagones

$$\begin{aligned} A &= A_{gr} - A_{pet} \\ &= 240 - 135 \\ &= 105 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Réponses

1-	
2-	
3-	
4-	
5-	
6-	
7-	
8-	
9-	
10-	
11-	
12-	